Diskrete Wachstumsmodelle

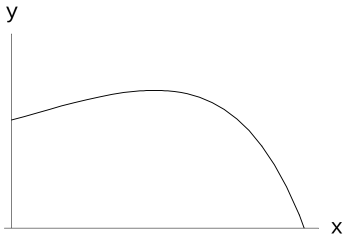
Einleitung und Übersicht

■ Modellgestaltung

Für die Beschreibung eines Wachstums mittels Funktionen gibt es 2 Möglichkeiten:

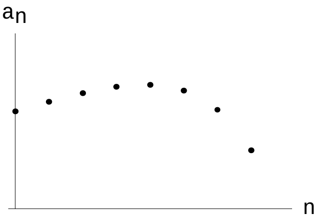
a) Kontinuierliche (stetige) Wachstumsfunktion:

- $D = \mathbb{R}_0^+$ bzw. ein Intervall
- Der Graf ist eine zusammenhängende Kurve
- Die Wachstumsfunktion $y = f(x)$ wird aus einer Differenzialgleichung hergeleitet

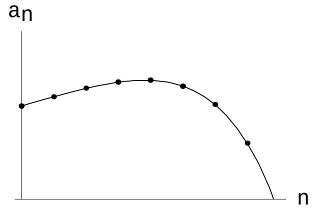


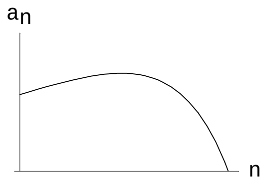
b) **Diskrete** Wachstumsfunktion:

- $D = \mathbb{N}$
- Graf besteht aus diskreten ("abgetrennten") Punkten
- Bildungsgesetz in Form einer Differenzen- bzw. Rekursionsgleichung der Gestalt $a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$, oder noch besser, durch einen Funktionsterm der Gestalt $a_n = f(n)$



Um den (optischen) Verlauf der Wachstumsfunktion im diskreten Fall besser hervorzuheben, werden die isolierten Punkte oft durch Geradenstücke verbunden, oder gleich durch die "Verbindungskurve" ersetzt, falls der Funktionsterm $a_n = f(n)$ auch für $\mathbb{R}_0^+$ (bzw. Intervalle) definiert ist.





■ Grundmodelle

1) $a_n = a_{n-1} + d$ Lineares Wachstum
2) $a_n = a_{n-1} \cdot q$ Exponentielles Wachstum

■ Erweiterte Modelle

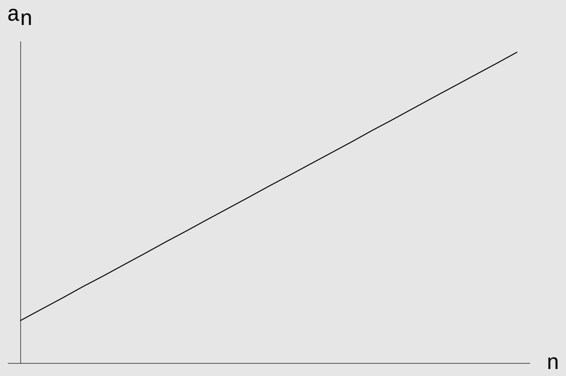
3) $a_n = a_{n-1} \cdot q + d$ Gemischtes Wachstum: Typ 1
4) $a_n = a_{n-1} \cdot q + d \cdot r^{n-1}$ Gemischtes Wachstum: Typ 2
5) $a_n = a_{n-1} \cdot q_{n-1}$ Logistisches Wachstum

Diskussion der Modelle

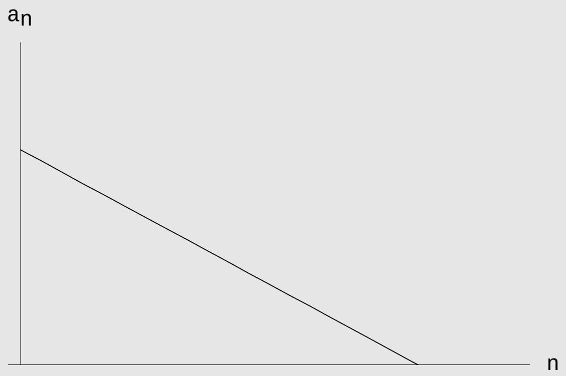
■ 1) $\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$ Lineares Wachstum

- Term: $a_n = a_0 + n \cdot d$ (Lineare Funktion)

a) $\boldsymbol{d > 0}$:



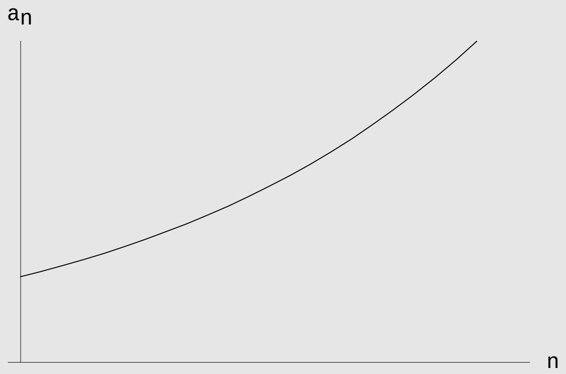
b) $\boldsymbol{d < 0}$:



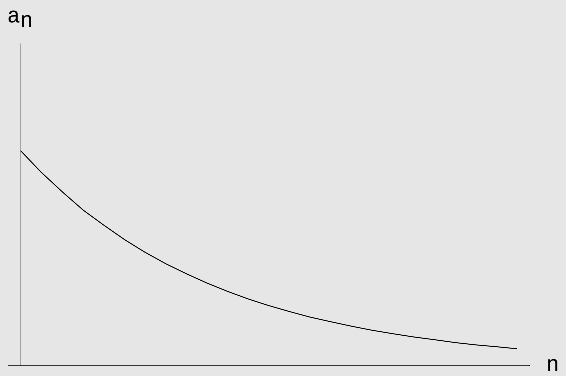
■ 2) $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q}$ **Exponentielles Wachstum**

- Term: $a_n = a_0 \cdot q^n$ (Exponentialfunktion)
- Wachstumsfaktor $q = 1 \pm \frac{p}{100}$
- Zuwachs/Zerfallsrate p in %

a) $\boldsymbol{q > 1}$: exp. Wachstum



b) $\boldsymbol{q < 1}$: exp. Zerfall



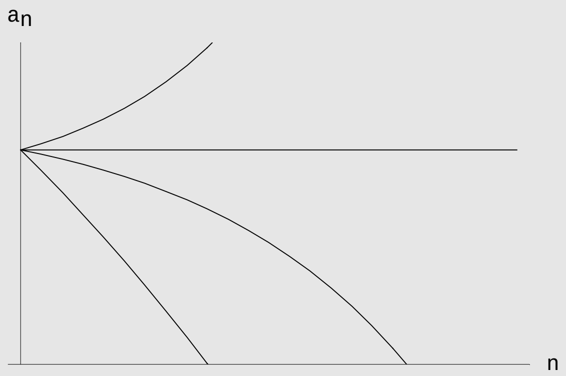
■ 3) $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q + d}$ Gemischtes Wachstum: Typ 1

- einfache Mischform von 1) und 2)

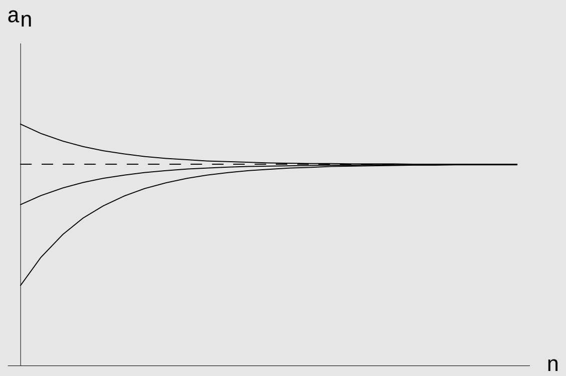
- Term: $a_n = \left(a_0 + \frac{d}{q-1}\right) \cdot q^n - \frac{d}{q-1}$

- Kurvenform der Gestalt: $y = A\,q^x + B$

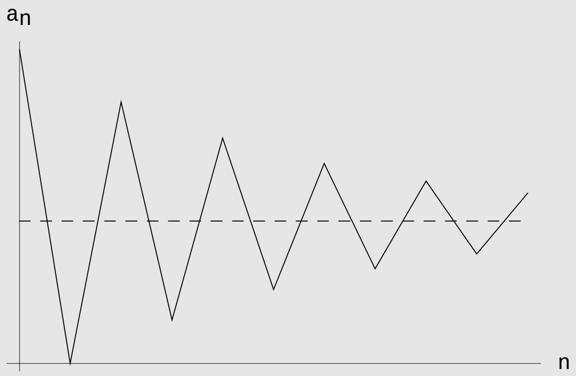
a) $\boldsymbol{q > 1}$: "labiles" Verhalten ($a_\infty = a_0$ oder ∞ oder $-\infty$)



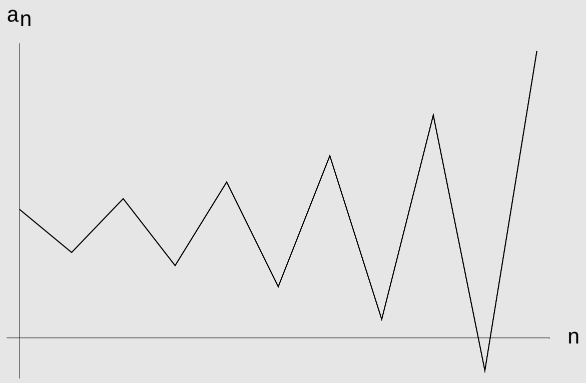
b) $\boldsymbol{0 < q < 1}$: "stabiles" Verhalten ($a_\infty = \frac{d}{1-q}$)



c) **$-1 < q < 0$**: "oszillierendes" Verhalten <u>mit</u> Grenzwert ($a_\infty = \frac{d}{1-q}$)



d) **$q < -1$**: "oszillierendes" Verhalten <u>ohne</u> Grenzwert



■ 4) $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q + d \cdot r^{n-1}}$ Gemischtes Wachstum: Typ 2

- Abänderung von Typ 1: $d_n = d \cdot r^n$ (bzw. $d_{n-1} = d \cdot r^{n-1}$) wächst/zerfällt selbst exponentiell

- **Steigerungs – / Dämpfungsfaktor r** des d – Wertes soll "Absturz" verursachen/verhindern

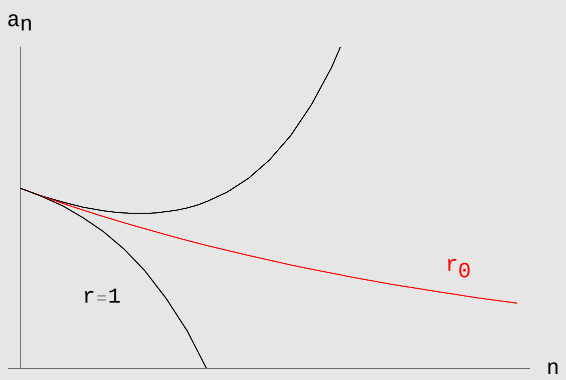
- Typ1, wenn $r = 1$

- Term: $a_n = \left(a_0 + \frac{d}{q-r}\right) \cdot q^n - \frac{d}{q-r} \cdot r^n$

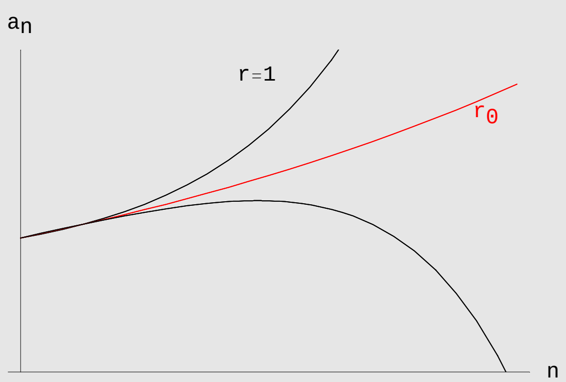
- Kurvenform der Gestalt: $y = A\,q^x + B \cdot r^x$ (Zusammenspiel zweier Exponentialfunktionen)

Zwei interessante Verhaltensweisen: Ausgangspunkt ist Typ 1: $\boldsymbol{q > 1,\ d < 0}$:

a) $r = 1 \implies$ "Absturz", aber $\boldsymbol{0 < r < r_0 = q + \frac{d}{a_0}} \implies$ "Rettung"



b) $r = 1 \implies$ "durchgehender Anstieg", aber $\boldsymbol{r > r_0 = q + \frac{d}{a_0}} \implies$ "Absturz"



■ 5) $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q_{n-1}}$ Logistisches Wachstum

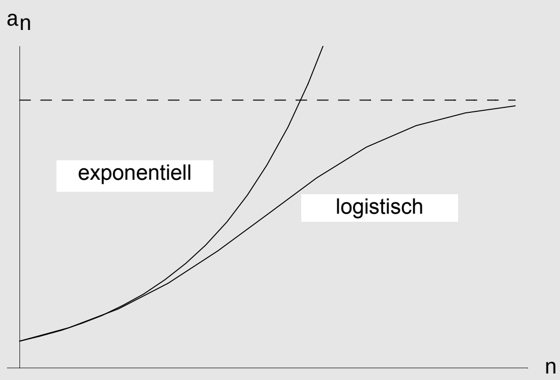
- Bremsung des exponentiellen Wachstums durch Verringerung des Wachstumsfaktors je näher a_n an die Kapazitätsgrenze K (= Grenzwert = a_∞) kommt.

- Vorgegeben ist: a_0, K, p_0

Zuwachsrate p_n ist **direkt proportional** zur Differenz $K - a_n$:

$$\frac{p_n}{p_0} = \frac{K-a_n}{K-a_0} \implies \boxed{p_n = p_0 \cdot \frac{K-a_n}{K-a_0}}, \quad q_n = 1 + \frac{p_n}{100}$$

a) a_n stets kleiner als K: **logistischer Fall**



b) $a_n > K$ für ein n: unter best. Bedingungen: **chaotischer Fall**