Musterbeispiele

1) Ergebnis einer MAM-Schularbeit:

Note	Anzahl
1	2
2	1
3	15
4	10
5	4

Eine Schularbeit wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die W., daß

a) die Note "2"

b) eine positive Note

vorliegt ?

---

2) Von 50 Bolzen sind 3 zu lang und 4 zu kurz. Wie groß ist die W., daß ein zufällig entnommener Bolzen zu kurz o d e r zu lang ist ?

---

3) Aus einem Kartenspiel (20 Karten) wird eine Karte gezogen. Wie groß ist die W., daß eine Herz-Karte o d e r eine As-Karte gezogen wird ?

---

4) 10% der Schüler einer Schule gehen in die Maturaklasse, 60% der Maturanten rauchen, während es unter den übrigen nur 20% sind.
Ein Schüler (der Schule) wird zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die W., daß er ein Maturant u n d ein Raucher ist ?

---

5) 2 (unterscheidbare) Würfel werden geworfen. Wie groß ist die W., daß:

a) beide "6" zeigen
b) der erste "6" und der zweite nicht "6" zeigt ?

---

6) Ein Wertgegenstand wird durch zwei voneinander unabhängige Alarmanlagen gesichert. Die erste fällt mit einer W. von 5%, die zweite mit einer W. von 1% aus.
Wie groß ist die W., daß

a) beide zugleich ausfallen ?

b) die eine oder die andere (od. beide zusammen) ausfällt ? (ausfallen ?)

c) höchstens eine ausfällt ?

d) genau eine ausfällt ?

---

7) "Elf-Meter-Training"
Jeder Spieler muß solange einen "Elf-Meter" schießen, bis der Ball im Tor ist.
Wie groß ist die W., daß ein Spieler höchstens 3 Versuche benötigt, wenn die Trefferw. pro Schuß 0,4 beträgt.

---

8) Wie lange muß man würfeln, damit man mit 99%-iger Sicherheit (wenigstens) einen "Sechser" würfelt ?

---

9) Qualitätskontrolle: 100 Artikel , davon 20% Ausschuß (A)
Stichprobe: 5 Stück (ohne zurücklegen)

Wie groß ist die W., daß

a) 1 A dabei ist? (gibt Bild der Grundges. wider)
b) (1±1)A dabei ist ? (d.h.: höchstens 2A)

AUFGABEN zur WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG (1. Teil)

1) Jemand wird aufgefordert, eine 2-ziffrige Zahl aufzuschreiben. Wie groß ist die W., daß sie
   a) gerade ist ? (0,5)
   b) ungerade ist ? (0,5)
   c) prim ist ? (0,23)
   d) zwischen 11 und 77 liegt ? (0,72)
   e) durch 2 und 3 teilbar ist ? (0,16)
   f) größer als 99 ist ? (0)

2) Werfe einen Würfel: Wie groß ist die W., daß
   a) "höchstens 5 Augen" (5/6)
   b) "mindestens 2 Augen, deren Quadrat gerade und kleiner als 36 sind" (1/3)
   geworfen werden ?

3) Werfen mit 2 (unterscheidbaren) Würfeln gleichzeitig: Berechne die W. folgender Ereignisse:
   a) "2 gerade Zahlen" (1/4)
   b) "Augensumme = 10" (1/12)
   c) "höchstens 9 Augen" (5/6)
   d) "mindestens 3 Augen" (35/36)
   e) "verschiedene Augen" (5/6)

4) Werfen mit 3 (unterscheidbaren) Münzen: Jede Münze hat die Möglichkeit: Zahl (Z) oder Wappen (W). Berechne die W. folgender Ereignisse:
   a) "alle zeigen eine gleiche Seite" (25 %)
   b) "jede Seite kommt wenigstens 1x vor" (75 %)
   c) " W höchstens 2x" (87,5%)
   d) " Z mindestens 2x" (50 %)

5) Mit 1 Münze 4x hintereinander werfen: Berechne die W. folgender Ereignisse:
   a) p("gleich viel W wie Z") (37,5%)
   b) p("höchstens 2 Z) (68,75%)
   c) p("mindestens 1 W") (93,75%)
   d) p("genau 1 Z") (25 %)

6) Werfen mit 3 Würfel: Berechne
   a) p("Die Augen 1 u. 2 u. 3 treten zugleich auf") (6/216)
   b) p("Die Zahl 6 tritt nicht auf") (125/216)
   c) p("nur ungerade Zahlen") (1/8)

7) Auf Grund einer repräsentativen Stichprobe hat man festgestellt, daß das Auftreten von ein-, zwei-, drei-, viersilbigen Wörtern in der deutschen Sprache durch die Wahrscheinlichkeiten $\frac{11}{20}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$ gegeben ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
   a) für das Auftreten von Wörtern mit mehr als vier Silben, (0,01)
   b) daß ein beliebig aus einem Text herausgegriffenes Wort einsilbig oder zweisilbig ist, (0,85)
   c) daß ein beliebig herausgegriffenes Wort mindestens zwei Silben hat? (0,45)

8) Wie groß ist die W., daß zwei willkürlich beim Schachspiel aufgestellte Türme einander schlagen können, wenn keine anderen Figuren am Brett stehen ? (2/9)

AUFGABEN ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG (2.Teil)

9) 100 Lose (Nr. 1 bis Nr. 100): 1 Los wird gezogen.
Das Los gewinnt, wenn
   a) die Zehnerziffer (der Nr.) 3 beträgt oder die Nr. durch 22 teilbar ist.
   b) die Nr. durch 3 oder durch 5 teilbar ist.
   c) die Nr. durch 4 oder durch 8 teilbar ist.
   d) die Nummer kleiner als 10 ist oder durch 7 teilbar ist.

Berechne jeweils die Gewinnchancen!

(o,14 / 0,47 / 0,25 / 0,22)

10) Aus einem Kartenspiel (20 Karten) wird eine Karte gezogen. Berechne:
   a) p("ist König oder As")
   b) p("ist Herz oder As")
   c) p("ist weder As noch Karo")

(0,4 / 0,4 / 0,6)

11) Werfe 2 Würfel (rot, blau):
   a) A: "roter Würfel zeigt 6"
      B: "blauer Würfel zeigt 6"

   b) A: "roter Würfel zeigt höchstens 3 Augen"
      B: "beide zusammen mindestens 11 Augen"

   c) A: "beide Würfel zeigen eine gerade Zahl"
      B: "mindestens ein Würfel zeigt 6"

Berechne jeweils $p(A \cup B)=?$

(11/36 ; 21/36 ; 15/36)

12) In einem Studentenheim wohnen 100 Studentinnen. Wir betrachten die angeführten Merkmale und stellen folgende Häufigkeitsverteilung fest:

	B	S	R	
P	35	5	0	
U	40	15	5	

P...pünktlich
U...unpünktlich
B...blond
S...schwarzhaarig
R...rothaarig

Wie groß ist bei zufälliger Auswahl die W. für folgende Ereignisse:
   a) B, S, R, P, U
   b) $P \cap B$, $P \cap S$, $U \cap B$, $U \cup S$, $B \cup S$

Wie groß ist die bedingte W. dafür, daß
   c) ein Mädchen blond ist, wenn man weiß, daß es pünktlich ist.
   d) es pünktlich ist, wenn man weiß, daß es blond ist.
   e) ein Mädchen unpünktlich ist, wenn es Schwarzhaarig ist.
   f) es pünktlich ist, wenn man weiß, daß es nicht rothaarig ist.

(a) 0,75/0,20/0,05/0,40/0,60 b) 0,35/0,05/0,40/0,65/0,95
c) $p(B|P)=35/40=0,875$
d) $p(P|B)=35/75 \approx 0,467$
e) $p(U|S) = 15/20 = 0,75$
f) $p(P|R') = 40/95 \approx 0,421$)

AUFGABEN ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG (3. Teil)

13) Bei der Produktion eines Massenartikels wurde durch eine repräsentative Stichprobe festgestellt, daß 0,1 der Produktion als Ausschuß bezeichnet werden muß, und daß von den übrig bleibenden 0,9 der Produktion nur 30% als erste Qualität bezeichnet werden können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein willkürlich herausgegriffenes Stück von erster Qualität ist?

(0,27)

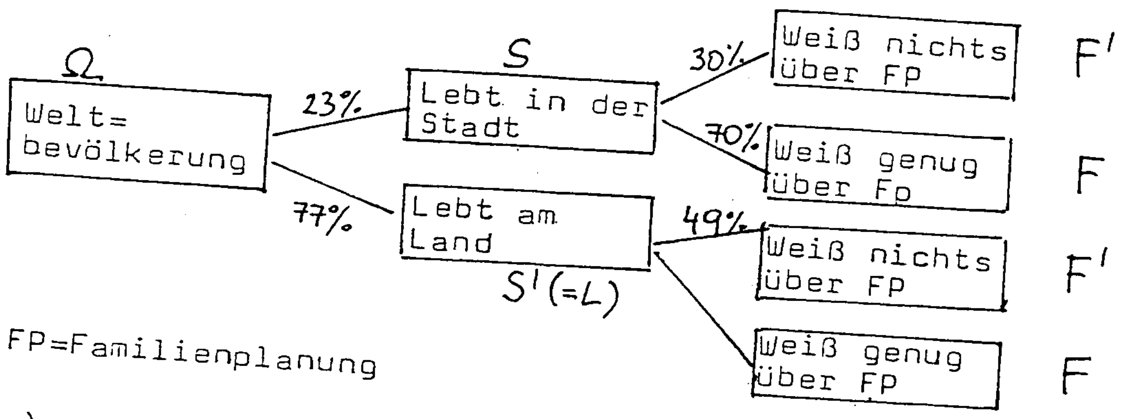
14) Bei einer Epidemie erkranken 12% der Bevölkerung einer Stadt. Bei 4% der Erkrankten verläuft die Erkrankung tödlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bürger der Stadt von der Epidemie befallen wird und stirbt?

(0,0048)

15) Von der Bevölkerung einer Stadt sind 40% mit einer Krankheit infiziert. 30% der Infizierten erkranken. 5% der Erkrankten sterben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein mit der Krankheit infizierter Bewohner der Stadt stirbt?

(0,006)

16)



FP=Familienplanung

a) Formuliere mündlich und berechne: $p(F|S')=?$

b) Wie groß ist die W., daß eine bel. Person (der Weltbevölkerung) zuwenig von FP weiß?

c) Wie groß ist die W., daß eine (zufällig ausgew.) Person, die über FP genug weiß, am Land lebt? (Überlege: liegt hier die Fragestellung einer bed. W. vor? welcher Wert≙100% ?-- wähle z.B. Ω =10.000, stelle eine Vierfeldertafel auf!)

(51% / 44,6% / 70,9%)

17) Eine Werbeagentur wird mit der Einführung eines neuen Produktes beauftragt. Sie entwirft ein Werbekonzept, das dann auch umgesetzt wird. Die Firmenleitung läßt die Arbeit der Agentur nach einem Jahr von eiem Meinungs=forschungsinstitut überprüfen. Eine Vierfeldertafel zeigt das Ergebnis der Befragung von 100 Personen:

	A	A'
B	6	14
B'	24	56

A: "wurden von der Werbung erreicht"
B: "haben das Produkt gekauft"

Ist es sinnvoll, weiter in diese Werbekampagne zu investieren?
(D.h.: Wirkt sich die Werbung auf die Kaufentscheidung aus? Ist also $p(B|A) > p(B)$?)

Antwort: nein ! (rechnerische B

AUFGABEN ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG (4.Teil)

18) Durch repräsentative Stichproben hat man ermittelt, daß 5 von je 100 Männern und 25 von je 10000 Frauen farbenblind sind. Eine farbenblinde Person wird auf gut Glück ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es eine Frau ist, wenn die Menge, aus der gewählt wird, aus gleich vielen Männern und Frauen besteht? (1/21)

19) Jemand spielt bei zwei Gewinnspiele A und B mit.
Die Gewinnchance beträgt bei A 50%, während sie bei B gar 60% beträgt.
Wie groß ist die W.,
   a) (wenigstens) einen Gewinn zu machen ?
   b) genau einen Gewinn zu machen ?

(80% / 50%)

20) Ein Gerät wird aus 2 Teilen zusammengebaut:
Mit 5% ist der 1.Teil,
mit 8% ist der 2.Teil defekt.
Wie groß ist die W.,daß
   a) das Gerät einwandfrei ist ? (0,874)
   b) höchstens ein Teil defekt ist ? (0,996)

21) Ein Fußballspieler schießt mit einer Sicherheit von 0,8 ein Tor. Er hat 3 Versuche.Wie groß ist die W.,daß er
   a) kein (0,008)
   b) wenigstens ein (0,992)
   c) genau ein (0,096)
Tor schießt ?

22) Ein Gehäuse besteht aus Oberteil O, Unterteil U u. Dichtung D.
Mit 5% W. ist O,
mit 5% W. ist U,
mit 10% W. ist D
defekt.
Wie groß ist die W.,daß
   a) das Gehäuse einwandfrei ist ? (0,81225)
   b) genau ein Teil defekt ist ? (0,17575)
   c) höchstens ein Teil defekt ist ? (0,988)
   d) höchstens D defekt ist ? (0,9025)
   e) O oder U oder D defekt ist ? (0,18775)
   f) O oder U defekt ist ? (0,0975)
   g) O oder U in Ordnung ist ? (0,9975)

23) Jemand spielt jede Woche bei einer Lotterie mit einer Gewinnchance von 20% mit.Wieviele Wochen muß er spielen,damit er mit 90%-iger W. wenigstens einen Gewinn macht ?
(11 Wochen)

24) Vier Geschütze schießen gleichzeitig, sonst aber unabhängig voneinander, auf dasselbe Flugzeug. Die Wahrscheinlichkeit, zu treffen, ist für jedes Geschütz 1/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Flugzeug getroffen wird? (0,5904)

25) Für ein Geschoß besteht dieselbe Wahrscheinlichkeit ein Ziel zu treffen oder es zu verfehlen. Es werde angenommen, daß die einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind. Wieviel Schüsse müssen abgefeuert werden, damit die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, wenigstens 0,99 beträgt? (7)

ZIEHEN

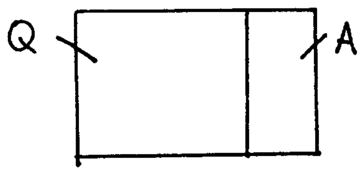
OHNE | **MIT**

ZURÜCKLEGEN

Bsp 1)

Karton mit 20 Glühbirnen (davon 15% A)
Sichprobe: 2 Glühbirnen werden geprüft
Der Karton wird angenommen, wenn
a) beide in Ordnung
b) höchstens eine defekt ist.
Berechne die Annahmew. für a) bzw. für b)

Ziehen $\boxed{\text{ohne}}$ zurücklegen	Ziehen $\boxed{\text{mit}}$ zurücklegen



1.Q = 1.Zug: Qualität
1.A = -"- Ausschuß
2.Q = 2. Zug: Qualität
2.A = -"- Ausschuß

a) $p(1.Q \cap 2.Q) = p(1.Q) \cdot p(2.Q \mid 1.Q)$ = ...	a) $p(1.Q \cap 2.Q) = p(1.Q) \cdot p(2.Q)$ = ...
b) $1 - p(\quad) = 1 - \quad =$	b) $= 1 - \quad =$

Bsp 2) wie Bsp 1), jedoch <u>200</u> Glühbirnen

$\Rightarrow$ Anzahl Q = ...
$\Rightarrow$ Anzahl A = ...

a)	a)
b)	b)

Zusammenfassung , Folgerungen:

	20 Gl.	200 Gl.	.... $\longrightarrow$ ......
a)			
b)			
	O H N E	O H N E	M I T

ZIEHEN

OHNE   **MIT**

ZURÜCKLEGEN

---

* Bsp 1) Karton mit 20 Glühbirnen (davon 15% A) = 3 Stk.
Sichprobe: 2 Glühbirnen werden geprüft
Der Karton wird angenommen, wenn
a) beide in Ordnung
b) höchstens eine defekt ist.
Berechne die Annahmew. für a) bzw. für b)

Ziehen **ohne** zurücklegen	Ziehen **mit** zurücklegen

1.Q = 1.Zug: Qualität
1.A = -"- Ausschuß
2.Q = 2. Zug: Qualität
2.A = -"- Ausschuß

Q	A
~~17~~ 16	3

$0{,}85^2$

a) $p(1.Q \cap 2.Q) = p(1.Q) \cdot p(2.Q \mid 1.Q) = \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} = 0{,}7158$	a) $p(1.Q \cap 2.Q) = p(1.Q) \cdot p(2.Q) = \frac{17}{20} \cdot \frac{17}{20} = 0{,}7225$
b) $1 - p(1A \cap 2A) = 1 - \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} = 0{,}9842$	b) $1 - 0{,}15^2 = 1 - \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{20} = 0{,}9775$

---

* Bsp 2) wie Bsp 1), jedoch 200 Glühbirnen

⇒ Anzahl Q = 170
⇒ Anzahl A = 30

wie oben

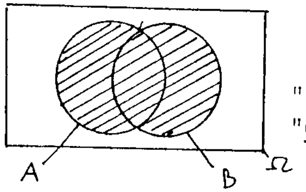
a) $\frac{170}{200} \cdot \frac{169}{199} = 0{,}7219$	a) $0{,}85^2 = 0{,}7225$
b) $1 - \frac{30}{200} \cdot \frac{29}{199} = 0{,}9781$	b) $1 - 0{,}15^2 = 0{,}9775$

Zusammenfassung , Folgerungen:

	20 Gl.	200 Gl.	.... → ∞
a)	0,7158	0,7219	0,7225
b)	0,9842	0,9781	0,9775
	OHNE	OHNE	MIT

SÄTZE aus der WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

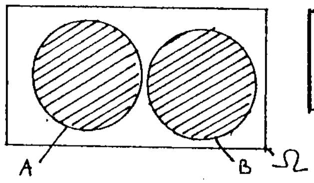
1) ADDITIONSSATZ ("Oder-Satz")



$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

"A oder B" " A und B"

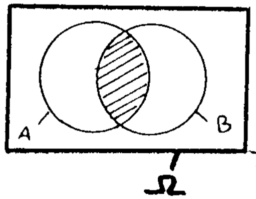
"wenigstens eines der beiden"

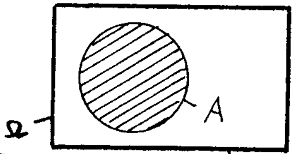


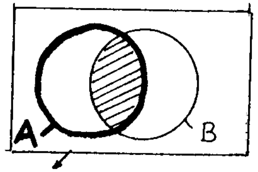
Spezialfall: A,B unvereinbar also $A \cap B = \{\}$

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

2) MULTIPLIKATIONSSATZ ("Und -Satz")







$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B | A)$

"A und B" "B unter d. Bedingung A"

(d.h.: Prozentanteil der für B günstigen Ausgänge in A)

Ω ≙ 100% Ω ≙ 100% A ≙ 100%

Spezialfall: A,B voneinander Unabhängig: $p(B|A) = p(B)$

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

3) GEGENWAHRSCHEINLICHKEIT

Ist $p(A)$ zu berechnen, aber $p(A')$ einfacher zu ermitteln , so rechnet man:

$$\boxed{p(A) = 1 - p(A')}$$

4) weitere Möglichkeiten des "ODER-SATZES"

A,B,C unabhängige Ereignisse:

a) $\boxed{p(A \cup B \cup C) = 1 - p(A') \cdot p(B') \cdot p(C')}$

"A od. B od. C"
"wenigstens eines dieser Ereignisse"

"A nicht u. B nicht u. C nicht"
"keines dieser Ereignisse"

b) $\boxed{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(A') \cdot p(B) + p(A') \cdot p(B') \cdot p(C)}$

Fälle v. A F., die noch auf B fehlen F., die noch auf C fehlen