

# Einfache Zinsen und Zinseszinsen

## Einteilung der Verzinsung:

a) nach der Kapitalisierung:

einfache Zinsen - Zinseszinsen

b) nach dem Zeitpunkt der Fälligkeit:

dekursive Verzinsung - antizipative Verzinsung

c) nach der Dauer der Verzinsungsperiode:

ganzjährige Verzinsung - unterjährige Verzinsung

## Endwertformeln (dekursive Verzinsung):

### ■ ganzjährige Verzinsung

$i = \frac{p}{100}$  ... Jahreszinssatz bei Jahresverzinsung (z.B.: Sparbuch: 1 M = 30 T, 1 J = 360 T)

r...Aufzinsungsfaktor

n...Anzahl der Jahre ( $n_v$  ... voll,  $n_r$  ... restl.)

einfache Zinsen	$Z_n = K_0 i n$	$K_n = K_0 (1 + i n)$	$n \leq 1$
Zinseszinsen	$Z_n = K_n - K_0$	$K_n = K_0 r^n$ , $r = 1 + i$	n ganzzahlig
gemischte Verzinsung	$Z_n = K_n - K_0$	$K_n = K_0 r^{n_v} (1 + i n_r)$	$n = n_v + n_r$

(gemischter Fall "zweiseitig":  $K_n = K_0 (1 + i n_{r1}) r^{n_v} (1 + i n_{r2})$  mit  $n = n_{r1} + n_v + n_{r2}$  )

Unterscheide zwischen tatsächlicher "gemischter Verzinsung" und "theoretischer Verzinsung" (Zinseszinsformel wobei n nicht ganzzahlig ist)

Vereinbarung: Bei Umkehraufgaben, wo n oder i gesucht wird:

Verwende "theoretischer Verzinsung" anstatt "gemischter Verzinsung" (Vereinfachung)

### ■ unterjährige Verzinsung

$j_m$ ...nomineller Zinssatz (Jahresnennzinssatz) bei unterjähriger Verzinsung (z.B.: Kredit)

$m = 2, 4, (12)$  bei halbjährlicher, vierteljährlicher (bzw. monatlicher) Verzinsung

$i_m = \frac{j_m}{m}$  ...relativer Zinssatz  $r_m = 1 + i_m$ ...relativer Aufzinsungsfaktor

n...Anzahl der Jahre

mn...Anzahl der Verzinsungsperioden

einfache Zinsen	$Z_n = K_0 i_m mn$	$K_n = K_0 (1 + i_m mn)$	$mn \leq 1$
Zinseszinsen	$Z_n = K_n - K_0$	$K_n = K_0 r_m^{mn}$ , $r_m = 1 + i_m$	mn ganzzahlig
gemischte Verzinsung	$Z_n = K_n - K_0$	$K_n = K_0 r_m^{(mn)_v} (1 + i_m (mn)_r)$	$mn = (mn)_v + (mn)_r$

"gemischte Verzinsung" und "theoretischer Verzinsung" wie oben

## Barwertformel (antizipative Verzinsung):

einfache Zinsen für 1 Jahr	$Z_1 = K_1 d$	$K_0 = K_1 (1 - d)$	$K_1 = 100 \%$
----------------------------	---------------	---------------------	----------------

### ■ 1)

Der Rückzahlungsbetrag für einen 1-jährigen Kredit beträgt € 500.- . Es wird mit 3% p.a. ant. (antizipativer Zinssatz  $d = 0.03$ ) verzinst. Berechne:

a) den (ohne Spesen und Gebühren) ausbezahlten Kreditbetrag.

b) den dekursiven Zinssatz  $i$ , der dasselbe bewirkt (äquivalenter Zinssatz)

Ergebnis: a) 485.- b) 3.09%

## ■ 2)

Der Rückzahlungsbetrag eines Kredites mit 1-jähriger Laufzeit beträgt bei 3.5 % p.a. ant. € 8290.16. Wie groß war der Kredit?

Ergebnis: 8000.-

## ■ 3)

Ein 1-jähriger Kredit wird mit 8.5 % p.a. dec. angeboten. Wie groß ist der äquivalente antizipative Zinssatz? (bewirkt dasselbe!)

Ergebnis: 7.83% ant.

Äquivalenzprinzip:

Vergleich aller Zahlungen zum (frei gewählten) gleichen Zeitpunkt

## ■ 4) Restschuld

Begleichung einer Schuld in der Höhe von € 5 000.-:

€ 3 000.- nach 1 Jahr, € 2 000.- nach 2 Jahren. Wie hoch ist der Rest nach 3 Jahren?

( $i = 0.10$ )

Ergebnis: 825.-

## ■ 5) gleiche Raten

Jemand hat folgende finanzielle Verpflichtung:

€ 10 000.- sofort und € 5 000.- nach 2 Jahren. Wie könnte die obige Verpflichtung durch 2 gleich hohe Raten  $x$  nach dem 1. bzw. 2. Jahr ersetzt werden? (8 % p.a.)

Ergebnis: 8011.54

Äquivalente Zinssätze:

$$j_m \rightarrow i_m \rightarrow r_m \quad \boxed{r_m^m = r_k^k} \quad r_k \rightarrow i_k \rightarrow j_k \quad m, k = (1), 2, 4, (12)$$

## ■ 6) Kreditvergleich

Kredit: 10 % p.a., Kapitalisierung semesterweise.

Welcher nominelle Zinssatz ergibt bei gleichem Kredit  $K_0$  in der selben Zeit den gleichen Rückzahlungsbetrag  $K_n$ , wenn

a) ganzjährig (vergleich mit Sparbuch)    b) vierteljährlich    verzinst wird?

Ergebnis: a) 10.25%    b) 9.88%

## ■ 7)

Ein Kredit wird zu 8.25 % p.a. bei vierteljährlicher Verzinsung angeboten. Berechne für Vergleichszwecke die äquivalenten Zinssätze:

a)  $j_2$     b)  $i$     c)  $i_{12}$     d)  $j_{12}$

Ergebnis: a) 0.08335    b) 0.08509    c) 0.00683    d) 0.08194

## ■ 8)

Verzinsung: 2.5 % p.s.: Berechne die äquivalenten Zinssätze:

a)  $i_4$     b)  $j_4$     c)  $i$     d)  $j_{12}$

Ergebnis: a) 0.0124    b) 0.04969    c) 0.05063    d) 0.04949

weitere (vermischte) Aufgaben:

## ■ 9)

$K_0 = 10\,000.-$ ,  $i = 0.04$  Berechne:

a)  $K_3 = ?$

b) Die Zinsbeträge für das 1., für das 2. und für das 3. Jahr. Wie viel % der Einlage machen die gesamten Zinsen aus?

Ergebnis: a) 11248.60    b) 400.00; 416.00; 432.64 ; 12.49%

## ■ 10)

€ 2 000.- werden zu 4 % p.a. auf ein Sparkonto gelegt und nach 3 J. 5 M. behoben.

a) Berechne das Guthaben    b) Vergleichsrechnung mit theoretischer Verzinsung

Ergebnis: a) 2287.22    b) 2286.8

## ■ 11) gemischte Verzinsung (beidseitig)

Sparbuch mit 2 % p.a. Verzinsung: Eröffnung am 14.8.2000 mit einer Einlage von € 10 000.-.

a) Auflösung am 25.6.2003. Zinsen=? (Einlagetag wird nicht, Auflösetag wird schon verzinst)

b) Wann (Datum) werden die Zinsen 20% der Einlage ausmachen?

c) Berechne den p.a. Zinssatz, wenn am 25.6.2003 die Zinsen € 600.- ausmachen sollen.

Ergebnis: a)  $Z=584.5$  ( $K_n[136/360, 2, 175/360]=10584.5$ ), b) 29.10.2009 (=9J2M15T), c) 2.055%

## ■ 12)

Sparbuch(4% p.a.): Einlage am 3.9.2002: € 5 000.– Auflösung am 14.6.2005

- a) Berechne das Guthaben    b) Vergleichsrechnung mit theoretischer Verzinsung  
c) Ab Jahresbeginn 2004 wird der Zinssatz um  $\frac{1}{2}$  % gesenkt. Um wie viel € wird das Guthaben dadurch geringer ausfallen?

Ergebnis: a) 5578.13            b) 5576.12            c) 39.24

## ■ 13)

Ein Kredit wird mit 10% p.a. vierteljährlich verzinst. Wie lange dauert es, bis sich die Schuld verdoppelt (verdreifacht) hat?

Ergebnis: 7J7T (11J 1M 15T)

## ■ 14)

Sparbuch mit 2% p.a. Verzinsung: Eröffnung am 12.8.2001 mit einer Einlage von € 10 000.–.

- a) Auflösung am 30.5.2002. Zinsen=?  
b) Wann (Datum) werden die Zinsen 20% der Einlage ausmachen?

Ergebnis: a) 160.64            b) 27.10.2010 (=9J2M15T)

## ■ 15)

Ein Kredit, semesterweise verzinst, wird nach 8 Monaten zurückgezahlt. Die Zinsen erhöhen den Kredit um 4.03%. Berechne den nominellen Zinssatz.

Ergebnis:  $j_2 = 0.06$

## ■ 16)

Eine Schuld in der Höhe von € 5 000.– soll folgendermaßen getilgt werden:

- a) € 3 000.– nach 1 Jahr , 2 gleich hohe Raten x nach 2 bzw. 3 Jahren. Berechne x bei 5.5 %.  
b) Die Hälfte sofort, € 1 000.– nach 1Jahr , den Rest y 2 Jahre später. Berechne y bei 8 %.

Ergebnis: a) 1232.18            b) 1982.88

## ■ 17)

Jemand hat die Verpflichtung, nach 3 Jahren € 10 000.– und nach 5 Jahren € 20 000.– zu zahlen. ( $i = 0.0825$ )

- a) Er kann die Gesamtsumme von € 30 000.– aber erst nach 5 Jahren bezahlen. Wie viele € müsste er sofort aufbringen, damit diese Zahlungsvariante mit der obigen gleichwertig ist?  
b) Da er nach 3 Jahren € 10 000.– nicht aufreiben kann, zahlt er nach 4 Jahren € 10 800.– (und nach 5 Jahren € 20 000.–). Ist damit die Schuld beglichen?  
c) Wie müsste der Zinssatz in b) geändert werden, damit bei der Zahlungsvariante b) die Schulden beglichen sind?

Ergebnis: a) 1155.84            b) nein (zu wenig)            c) 8 %

## ■ 18)

Jemand hat € 800.– in 2 Jahren und € 1 300.– in 5 Jahren zu zahlen. Mit welcher Einmalzahlung kann bei 4% p.a. diese Verpflichtung

- a) heute,            b) in 3 Jahren abgelöst werden?

Ergebnis: a) 1808.15            b) 2033.92

## ■ 19)

Für eine Realität bieten

A: € 30 000.– sofort, € 100 000.– in 2 Jahren und € 50 000.– in 4 Jahren.

B: € 50 000.– sofort, € 50 000.– in 1 Jahr und € 70 000.– in 4 Jahren.

- a) Welches Angebot erreicht einen höheren Preis? ( $j_4 = 0.03$ )  
b) Bei welchem Zinssatz  $j_2$  wäre das Angebot gleich gut?

Ergebnis: a) z.B.: Bewertung zu Beginn: A: 168563.42 B: 160639.94 b) 7.7% ( $r_2 = 1.03851$ )

## ■ 20)

Angebot für ein Kunstobjekt:

A: € 2 500.– sofort, € 5 100.– nach 6 Monaten, € 2 400.– nach 12 Monaten zahlbar.

B: € 150.– sofort, € 5 000.– nach 6 Monaten, € 4 950.– nach 12 Monaten zahlbar.

- a) Bei welchem p.a. Zinssatz bei semesterweiser Verzinsung sind die Angebote gleich?  
b) Wer bietet einen höheren Preis bei 6% p.a.? (theoretisch:  $r = r_2^2$ )

Ergebnis: a) 4.13% p.a. b) Nach 12 Monaten: A=10300.77 B=10256.82