Diskrete Wachstumsmodelle: Beispiele u. Übungen

(Darstellung durch Rekursionsgleichungen)

A) Musterbeispiel Typ 1: $a_n = a_{n-1} \cdot q + d$

In einem abgegrenzten Gebiet besteht eine Nagetierpopulation in der Größe von 1Million Individuen. Durch natürliches Wachstum vergrößert sich diese Population jährlich um 1/3. Die Jagdbehörde gestattet jährlich das Fangen von 400 000 Tieren.

a) Man ermittle die Anzahl nach 5 Jahren

b) Finde eine Rekursionsformel: $a_n = \ldots$ (a_n = Anzahl nach n Jahren)

c) Wie groß darf die Fangzahl höchstens sein, damit die Population nicht ausgerottet wird?

d) Wie groß müßte die jährliche Zuwachsrate(%) mindestens sein, damit (bei $a_0 = 1\,000\,000$ und Fangzahl = 400 000 die Population nicht ausgerottet wird?

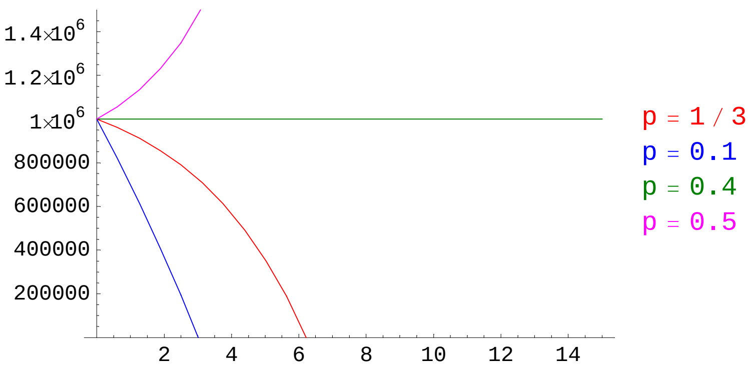
e) Tabelle ausfüllen (Fangzahl = 400 000) bis Verhalten erkennbar ist.

p	1 / 3	10 %	40 %	50 %
n	a_n	a_n	a_n	a_n
0	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000
1	...	...	...	...
2	...	...	...	...
...	...	...	...	...

f) Grafische Darstellung: 1 *J.* = 1 cm , 100 000 Stk = 1 cm

Ergebnis: a) $a_5 = 357202$; b) $a_n = \frac{4}{3} a_{n-1} - 400\,000$; c) 333 333.33 ; d) 40 % ; e)

n	a_n	a_n	a_n	a_n
p	1/3	0.1	0.4	0.5
0	1000000	1000000	1000000	1000000
1	933333.	700000.	$1. \times 10^6$	1.1×10^6
2	844444.	370000.	$1. \times 10^6$	1.25×10^6
3	725926.	7000.	$1. \times 10^6$	1.475×10^6
4	567901.	-392300.	$1. \times 10^6$	1.8125×10^6
5	357202.	-831530.	$1. \times 10^6$	2.31875×10^6
6	76268.9	-1.31468×10^6	$1. \times 10^6$	3.07813×10^6
7	-298308.	-1.84615×10^6	$1. \times 10^6$	4.21719×10^6
8	-797744.	-2.43077×10^6	$1. \times 10^6$	5.92578×10^6
9	-1.46366×10^6	-3.07384×10^6	$1. \times 10^6$	8.48867×10^6
10	-2.35155×10^6	-3.78123×10^6	$1. \times 10^6$	1.2333×10^7

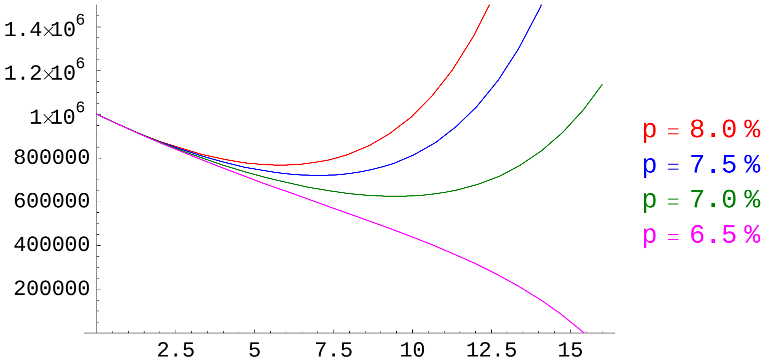


B) Musterbeispiel Typ 2: $a_n = a_{n-1} \cdot q + d \cdot r^{n-1}$

Fortsetzung von Bsp. A: in der ursprünglichen Situation $(1\,000\,000, 4/3, -400\,000)$ würde die Population aussterben. Rettung durch Verringerung der Fangzahlen:
a) Die Fangzahlen sollen um jeweils 8 % (ausgehend von 400 000) im Vergleich zum Vorjahr verringert werden. Finde die neue Rekursionsformel und untersuche nun das Verhalten.
b) Verändere die Fangzahlverringerung so lange, bis die Population gerade noch überlebt (experimentiere in halbzahligen %-Abständen: Kurve bei 8%, Kurve bei 7.5% usw.): Wie lautet der Grenzprozentsatz?)

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{4}{3} - 400000 \cdot 0.92^{n-1}$ b) 7% (bei halbzahligen Abständen), exakt: $6.\dot{6}$

n	a_n	a_n	a_n	a_n
p (%)	8	7.5	7	6.5
0	$1. \times 10^6$	$1. \times 10^6$	$1. \times 10^6$	$1. \times 10^6$
1	933333.	933333.	933333.	933333.
2	876444.	874444.	872444.	870444.
3	830033.	823676.	817299.	810903.
4	795235.	781653.	767990.	754243.
5	773756.	749367.	724765.	699950.
6	768042.	728281.	688078.	647430.
7	781514.	720482.	658642.	595983.
8	818880.	728875.	637509.	544758.
9	886553.	757449.	626179.	492701.
10	993206.	811626.	626741.	438478.
11	1.15052×10^6	898735.	642061.	380381.
12	1.37417×10^6	1.02864×10^6	676040.	316194.
13	1.68516×10^6	1.21457×10^6	733948.	243026.
14	2.11158×10^6	1.47425×10^6	822880.	157076.
15	2.69096×10^6	1.83137×10^6	952356.	53327.
16	3.47343×10^6	2.31761×10^6	1.13513×10^6	-74857.5
17	4.52588×10^6	2.97524×10^6	1.38825×10^6	-236283.
18	5.93758×10^6	3.86071×10^6	1.73451×10^6	-442646.

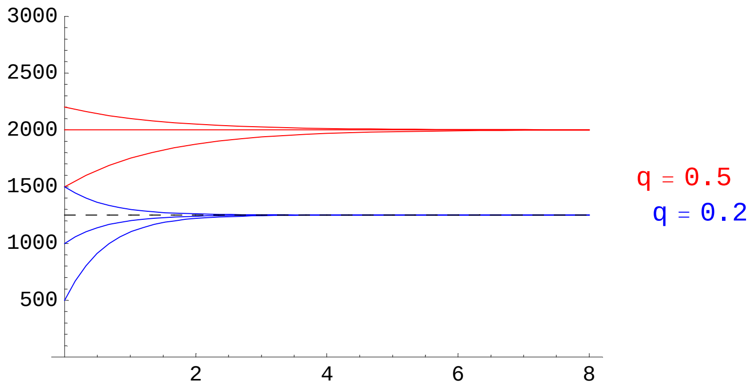


Übungen:

1) Krankheit

Ausbreitung einer Krankheit: Die Hälfte der jeweils vorhandenen Krankheitsfälle wird geheilt, jedes Jahr kommen aber 1000 neue Fälle dazu. Ende 1982 gab es 1200 Krankheitsfälle.
a) Rekursionsgleichung
b) Erstelle eine Tabelle für 1982 bis 1990
c) Was passiert, wenn andere Anfangszahlen verwendet werden? ($a_0 = 1500$, 2000, 2200)
Skizziere den Verlauf der versch. Fälle. Interpretiere das Ergebnis!
d) Gib die Rekursionsgleichung für den Fall an, dass jährlich 80 % geheilt werden (und 1000 neue Fälle dazukommen).
Experimentiere mit Anfangszahlen $a_0 = 500$, 1000, 1500 und skizziere die Kurven.
Vergleiche mit Aufg. c) und finde eine Formel für den Grenzwert (stabiles Gleichgewicht)

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1}\, 0.5 + 1000$; b) 1982 : 1200 ; ...; 1990 : 1996.88 , c) gleicher Grenzwert : 2000 ;
d) $a_n = a_{n-1}\, 0.2 + 1000$, gleicher Grenzwert : 1250
c)+d) grafisch ; e) $a_\infty = 2000$ bzw. 1250 , $a_\infty = \frac{d}{1-q}$

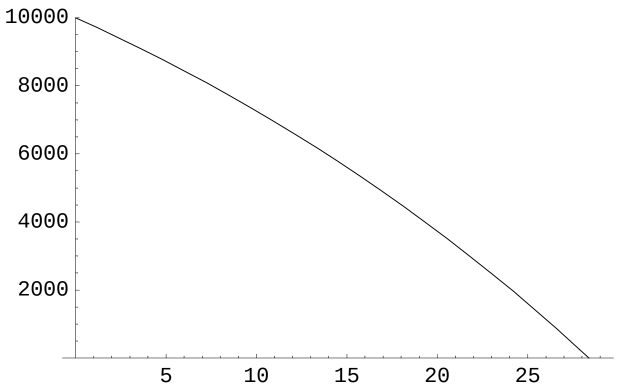


■ 2) Holzschlag

Der jährliche Zuwachs der Holzmenge eines Schlages von 10 000 m^3 beträgt 2.56 %, die jährliche Schlägerungsrate 500 m^3.

a) Rekursionsformel (a_n= Holzvolumen nach n Jahren)
b) Berechne die Werte bis a_6.
c) Der Förster behauptet, dass bei diesen Schlägerungsraten der Wald nicht länger als 30 Jahre steht: d.h.: gibt es ein n mit $a_n \approx 0$?
d) skizziere den Prozess im Koordinatensystem
e) Bei welcher Schlägerungsrate bleibt der Holzbestand konstant, bei welcher nimmt er zu?
f) Wie groß müsste bei einer Schlägerungsrate von 500 $m^3/$Jahr der Anfangsbestand mindestens sein, damit sich das Holzvolumen nicht verringert?

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.0256 - 500$ b) 8439.04 c) a_{29} schon negativ e) 256 f) 19531.3



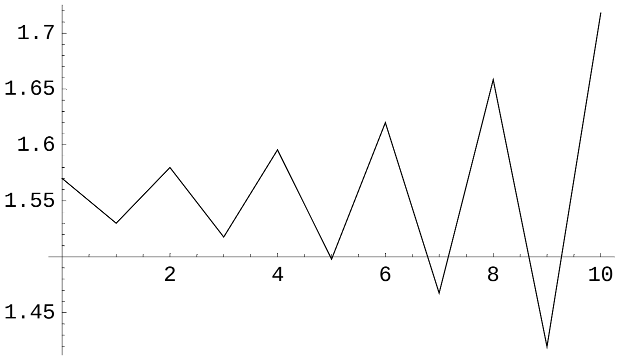
n	a_n
p(%)	2.56
0	10000
1	9756.
2	9505.75
3	9249.1
4	8985.88
5	8715.92
6	8439.04
	....
26	1141.4
27	670.62
28	187.788
29	−307.405

■ 3) Schweinepreiszyklus

Der Schweinepreis schwankt nach Angebot und Nachfrage. Es gehorcht der in regelmäßigen Perioden erhobene Preis p_n einer Rekursionsgleichung vom Typ: $p_n = a \cdot p_{n-1} + b$. Die Preise in 3 aufeinanderfolgenden Perioden waren: € 1.57, € 1.53 und € 1.58 pro kg Lebengewicht.

a) Rekusionsgleichung
b) Die (voraussichtlich) nächsten 3 Preise (2 Dez.)
c) Verhalten für $n \to \infty$ (Sinnhaftigkeit des Modells?)

Ergebnis: a) $p_n = -1.25 \cdot p_{n-1} + 3.4925$ *b) 1.52 1.60 1.50*



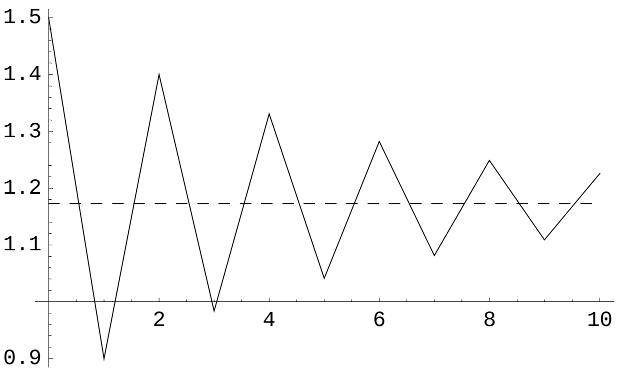
n	a_n
0	1.57
1	1.53
2	1.58
3	1.5175
4	1.59563
5	1.49797

■ 4) Preiszyklus

Die Preise eines Produktes in den letzten 3 Quartalen betrugen:
€ 1.5 € 0.9 € 1.4 Annahme: $p_n = a \cdot p_{n-1} + b$

a) Rekusionsgleichung
b) Die (voraussichtlich) nächsten 3 Preise (2 Dez.)
c) Verhalten für $n \to \infty$ (Grenzwert?)

Ergebnis: a) $p_n = -0.8\dot{3} \cdot p_{n-1} + 2.1568$ *b) 0.98 1.33 1.04 c) 1.17273*

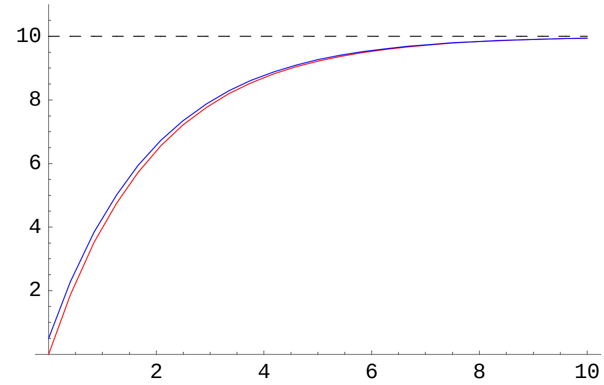


n	a_n
0	1.5
1	0.9
2	1.4
3	0.983333
4	1.33056
5	1.0412

5) Konzentrationsverlauf eines Medikamentes

Jemand nimmt täglich ein bestimmtes Medikament ein. Während 24 Stunden werden 40 % dieser Substanz ausgeschieden, 4 mg werden täglich zugeführt. Zu Beginn dieser Kur hatte der Patient
a) 0 mg b) 0.5 mg dieser Substanz im Blut.
(1) Zeige, dass der Blutgehalt dieser Substanz während der Kur schrittweise steigt (Tabelle!)
(2) Wird der Patient jemals 9 mg oder mehr dieses Stoffes im Blut haben? Wenn ja, wann?
(3) Gibt es einen Grenzwert?

Ergebnis: $a_n = a_{n-1} \cdot 0.6 + 4$ (2) a) $a_5 = 9.2224$ b) $a_5 = 9.26128$ (3) 10

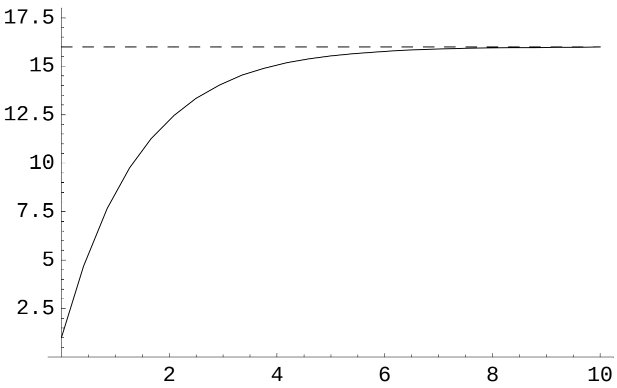


n	a_n	a_n
0	0	0.5
1	4	4.3
2	6.4	6.58
3	7.84	7.948
4	8.704	8.7688
5	9.2224	9.26128
6	9.53344	9.55677
7	9.72006	9.73406
8	9.83204	9.84044
9	9.89922	9.90426
10	9.93953	9.94256

6) Konzentrationsverlauf einer Salzlösung

Einem Liter einer schwachen Salzlösung ($a_o = 1$ dag Salz) wird 1 Liter destilliertes Wasser zugefügt. Nach guter Durchmischung wird 1 Liter abgegossen und danach 8 dag Salz hinzugefügt. Dieser Prozess wird nun immer wieder wiederholt.
a) Beschreibe den Prozess durch eine Rekursionsgleichung
b) Wird der Salzgehalt der Lösung jemals 17 dag / Liter übersteigen? Wenn ja, wann? Wenn nein, warum?
c) Gibt es einen Grenzwert?

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 0.5 + 8$ b) nein c) 16



n	a_n
0	1.
1	8.5
2	12.25
3	14.125
4	15.0625
5	15.5313
6	15.7656
7	15.8828
8	15.9414
9	15.9707
10	15.9854

■ 7) Fischpopulation

Eine Fischpopulation besteht aus 1000 Stk und hat eine jährliche Wachstumsrate von 50 %. Die jährlichen Fangzahlen wachsen um jeweils 10 %, ausgehend von 400 Stk.

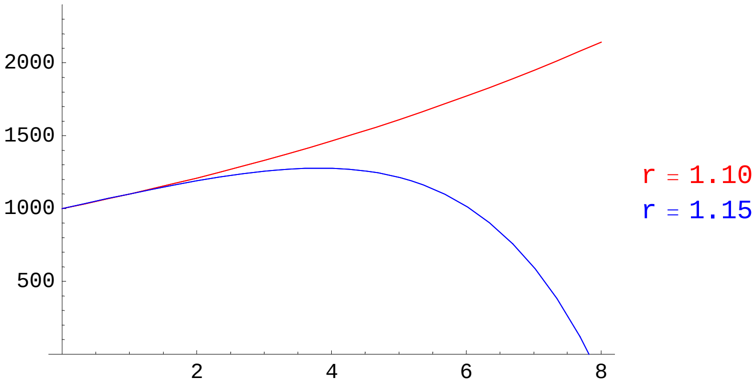
a) Rekursionsgleichung für die Anzahl nach n Jahren

b) Nach wieviel Jahren werden es 2594 sein? (Berechne einige Werte ausführlich!)

c) Wie lautet die Rekursionsgleichung , wenn die Fangzahlen um 15 % wachsen? Wird die Population unter diesen Bedingungen aussterben?

d) Skizziere die Kurven für a) und c).

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.5 - 400 \cdot 1.1^{n-1}$ b) 10J (2593.74) c) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.5 - 400 \cdot 1.15^{n-1}$



n	a_n	a_n
r	1.1	1.15
0	1000.	1000.
1	1100.	1100.
2	1210.	1190.
3	1331.	1256.
4	1464.1	1275.65
5	1610.51	1213.87
6	1771.56	1016.27
7	1948.72	599.175
8	2143.59	−165.246

■ 8) Krankheitsverlauf

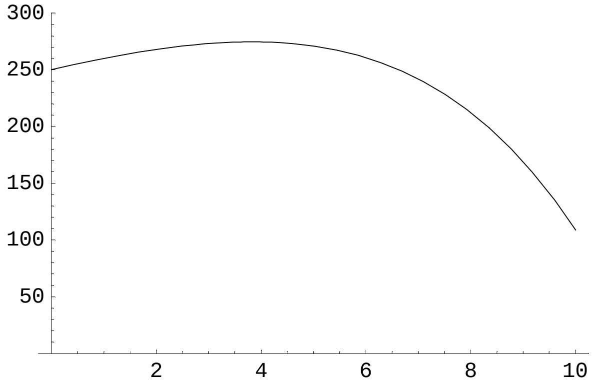
Eine Tierpopulation ist von einer Krankheit befallen. Im 1.Jahr verenden 40 Tiere, jedes weitere Jahr um jeweils 10 % mehr. Die jährliche Zuwachsrate an kranken Tieren beträgt 20 %. Ursprünglich waren 250 Tiere krank.

a) Rekursionsgleichung für die Anzahl der kranken Tiere nach n Jahren

b) Wie viele Tiere werden nach 10 Jahren krank sein?

Ergebnis:

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.2 - 40 \cdot 1.1^{n-1}$ b) 108.74

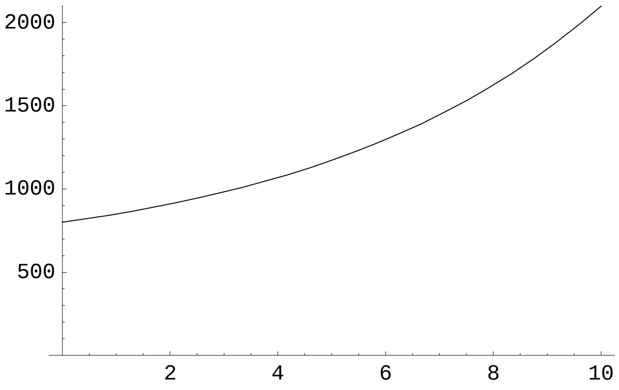


n	a_n
0	250.
1	260.
2	268.
3	273.2
4	274.6
5	270.956
6	260.727
7	242.01
8	212.463
9	169.212
10	108.737

■ 9) Lohnverhandlungen

Anfangslohn: € 800. – und ein jährlicher Steigerungsbetrag, der nach einem Jahr € 50. – beträgt und dann jährlich um jeweils 20 % wächst.
a) Rekursionsgleichung: a_n = Lohn nach n – ter Lohnsteigerung (= Lohn für das $(n+1)$ te Jahr!)
b) Nach wie vielen Steigerungen beträgt der Lohn mehr als € 1600. – ?

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} + 50 \cdot 1.2^{n-1}$ b) 8 (1624.95)

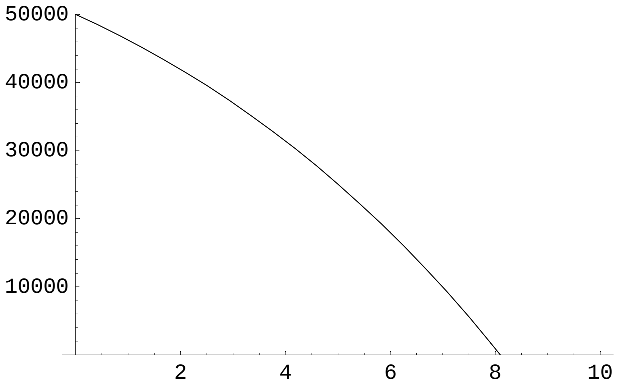


n	a_n
0	800.
1	850.
2	910.
3	982.
4	1068.4
5	1172.08
6	1296.5
7	1445.8
8	1624.95
9	1839.95
10	2097.93

■ 10) Ratenbehebung

Ein Gewinn von € 50 000. – ist zu 8.5 % *p.a.* angelegt. Am Ende des ersten Jahres werden € 8000. – behoben, danach am Ende jedes weiteren Jahres um jeweils 3 % mehr.
a) Rekursionsgleichung: Guthaben nach n Jahren (nach Behebung)
b) Nach wie viel Jahren bleiben nur mehr weniger als € 10 000. – ?

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.085 - 8000 \cdot 1.03^{n-1}$ b) 7 (9922.62)



n	a_n
0	50000.
1	46250.
2	41941.3
3	37019.1
4	31423.9
5	25090.8
6	17949.3
7	9922.62
8	927.052
9	−9128.31
10	−20342.4

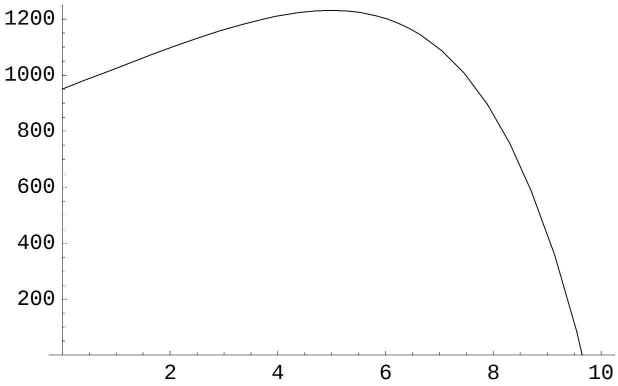
■ 11) Tierpopulation

Eine Tierpopulation besteht aus 950 Stk und hat eine jährliche Wachstumsrate von 50%. Die jährlichen Abschussraten wachsen um 10%, ausgehend von 400 Stk im ersten Jahr.

a) Rekursionsgleichung

b) Skizziere den Verlauf. Was passiert mit der Population?

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.5 - 400 \cdot 1.1^{n-1}$ *b) 9J.:435.78 10J.: -289.509*



n	a_n
0	950.
1	1025.
2	1097.5
3	1162.25
4	1210.98
5	1230.82
6	1202.03
7	1094.42
8	862.143
9	435.78
10	−289.509

■ 12) Walpopulation

Eine Population von Walen wächst jährlich um 15 %. die derzeitige Anzahl beträgt 1120.
Gib die Rekursionsgleichung an, wenn:
a) Das Wachstum ungestört verläuft.
b) jährlich 200 gefangen werden.
c) Angenommen im 1.Jahr werden 200 gefangen, so sollen sich die Fangzahlen jährlich um jeweils 10% verringern. Kann die Population gerettet werden?
d) Verwende statt 10% nun: 9%, 8%, ...(ganzzahlig)
Wie weit kann die Prozentzahl verringert werden, ohne dass die Population ausstirbt? Beschreibe den Grenzfall (kleinster a_n Wert)

Ergebnis: a) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.15$ b) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.15 - 200$ c) $a_n = a_{n-1} \cdot 1.15 - 200 \cdot 0.9^{n-1}$ ja(min n. 3 J.:1069.88)
d) 3% (min: 749.41 nach 19 J.)

n	a_n	a_n	a_n	a_n
r	0.9	0.96	0.97	0.98
0	1120.	1120.	1120.	1120.
1	1088.	1088.	1088.	1088.
2	1071.2	1059.2	1057.2	1055.2
3	1069.88	1033.76	1027.6	1021.4
4	1084.56	1011.88	999.205	986.372
5	1116.03	993.789	972.028	949.854
6	1165.33	979.783	946.085	911.548
7	1233.84	970.199	921.403	871.111
8	1323.26	965.439	898.017	828.153
9	1435.66	965.977	875.971	782.223
10	1573.52	972.367	855.321	732.807
11	1739.81	985.255	836.134	679.314
12	1938.02	1005.4	818.494	621.064
13	2172.24	1033.66	802.499	557.281
14	2447.24	1071.07	788.269	487.068
15	2768.57	1118.8	775.942	409.4
16	3142.68	1178.2	765.683	323.096
17	3577.02	1250.85	757.685	226.801
18	4080.22	1338.56	752.172	118.957
19	4662.24	1443.42	749.408	-2.22637
20	5334.55	1567.85	749.696	-138.807
21	6110.42	1714.63	753.392	-293.149
22	7005.1	1886.96	760.905	-467.973