Theorie

Rotationskurve einer Spiralgalaxie

Modell einer Spiralgalaxie

Eine Spiralgalaxie ist grundsätzlich aus drei Komponenten aufgebaut:

- Scheibe,
- Bulge und
- Halo.

Die Galaxien-Scheibe besteht vorwiegend aus Sternen, Fas und Staub die das Zentrum der Galaxie, wie der Name schon sagt, in einer relativ dünnen Scheibe umkreisen.

Der Galaxien-Bulge wird durch ältere Sternen, die das Zentrum der Galaxie zentrumsnah in allen möglichen Bahnneigungen umkreisen, gebildet.

Der Galaxien-Halo umgibt die ganze Galaxie kugelförmig und besteht vorwiegend aus Kugelsternhaufen und Dunkler Materie.

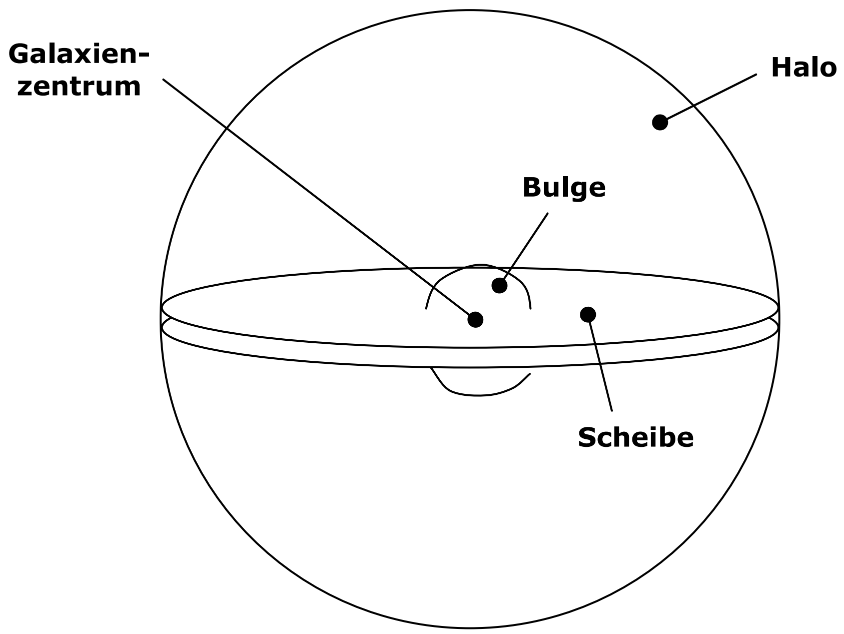

Abbildung 1.1) Schematischer Aufbau einer Spiralgalaxie

(A) Massenverteilung einer dünnen homogenen Scheibe

Die Scheibe einer Spiralgalaxie kann durch einen Zylinder geringer Höhe approximiert werden. Ist die Dichte in der Scheibe als ρ_S gegeben, so läßt sich die Scheibenmasse als

$$M_S = \rho_S \cdot V_S$$

anschreiben. Das Volumen V_S eines Zylinders mit der Höhe d (= Scheibendicke) ist

$$V_S = A \cdot d$$

wobei A die Grund- bzw. Deckfläche der Zylinders bedeutet.

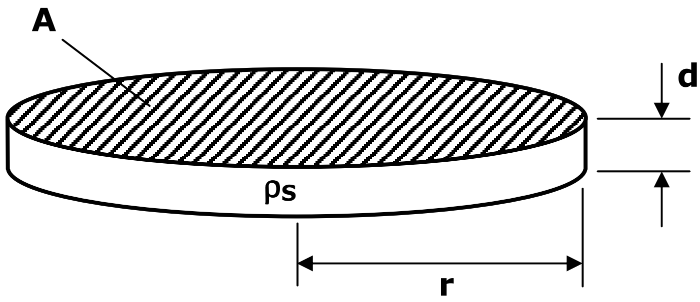

Abbildung 1.2) Einfaches Modell der Scheibe einer Spiralgalaxie

Nun können wir uns die Massenabhänggkeit vom Abstand r zwischen Mittelpunkt und dem auf einer Kreisbahn umkreisenden Körper berechnen. Dazu setzen wir für die Fläche A die Kreisfläche, die durch die Kreisbahn beschrieben wird, ein.

Hinweis: Es ist wichtig, daß die Scheibe eine relativ kleine Höhe besitzt, da bei einer großen Höhe auch Teile des Volumens und somit der Masse der Scheibe außerhalb des Kugelvolumens, deren Rand durch die Umlaufbahn definiert ist, befindet und das Resultat verfälscht.

Nun ergibt sich für die Masse als Funktion des Abstandes

$$M_S(r) = \rho_S \cdot V_S = \rho_S \cdot A \cdot d = \rho_S \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d$$

(A1) Konstante Dichte der Scheibe

Ist die Dichte ρ_S in der Scheibe konstant können wir

$$M_S(r) = K_S \cdot r^2$$

schreiben, wobei

$$K_S = \rho_S \cdot \pi \cdot d = \text{konstant}$$

(A2) Abfallende Dichte in der Scheibe nach außen

Als gute Näherung für eine abfallenden Dichte in der Scheibe ist ein exponentieller Abfall, das heißt

$$\rho_S(r) = \rho_{S0} \; \mathrm{EXP}(- r / r_H) \quad ,$$

wobei ρ_{S0} die Dichte im Zentrum der Galaxienscheibe (Galaxienzentrum) und r_H eine typische Längenskala in radialer Richtung in der Scheibe darstellen.

Hinweis: Die Längenskala gibt an, ab welchem Radius die Dichte jeweils um den Faktor abfällt 1/e, zum Beispiel bei einem Radius von $r = r_H$ beträgt die Dichte nur mehr $\rho_S(r_H) = \rho_{S0} * 1/e$, bei einem Radius von $r = 2 * r_H$ nur mehr $\rho_S(2 * r_H) = (\rho_{S0} * 1/e) * 1/e$, usw.

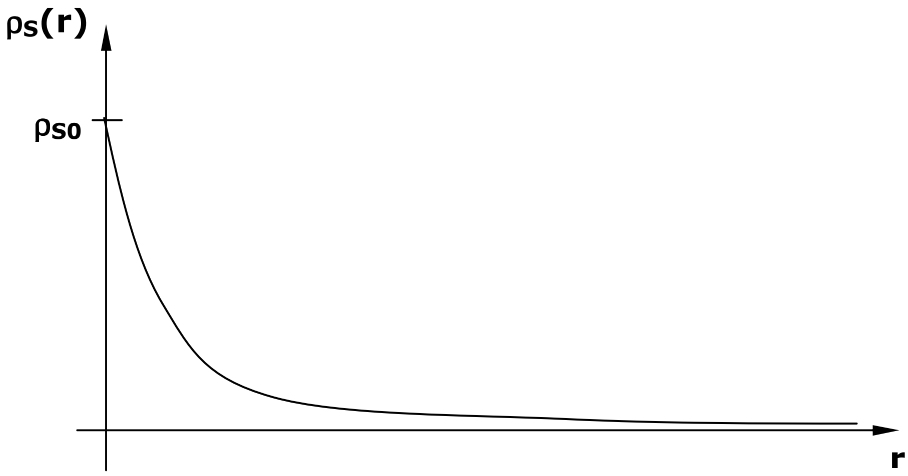

Abbildung 1.3) Exponentieller Abfall der Dichte in der Galaxienscheibe

(B) Massenverteilung einer kugelförmigen Sphäre

Der Halo einer Spiralgalaxie kann durch eine kugelförmige Sphäre um das Galaxienzentrum beschreiben. Ist die Dichte in der Sphäre bzw. im Galaxien-Halo als ρ_H gegeben, so läßt sich die Halomasse als

$$M_H = \rho_H \cdot V_H$$

ansetzen. Das Volumen V_H einer Kugel mit dem Radius r ist

$$V_H(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^3 / 3$$

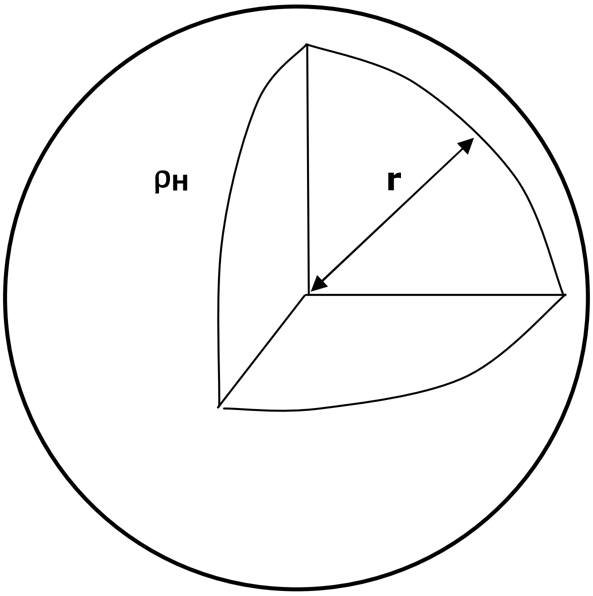

Abbildung 1.4) Einfaches Modell des Halo einer Spiralgalaxie

Nun ergibt sich für die Masse als Funktion des Abstandes

$$M_H(r) = \rho_H \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 / 3$$

(B1) Konstante Dichte des Halos

Ist die Dichte ρ_H im Halo konstant können wir

$$M_H(r) = K_H \cdot r^3$$

schreiben, wobei

$$K_H = \rho_H \cdot 4 \cdot \pi / 3 = \text{konstant}$$

(B2) Abfallende Dichte im Halo nach außen

Eine gute Näherung einer abfallenden Dichte im Galaxienhalo ist der Dichteabfall in einer isothermen Kugel (Materie hat überall dieselbe Temperatur)

$$\rho_H(r) = \rho_{H0} \left(1 + (r / r_C)^2 \right)^{-1} \quad ,$$

wobei ρ_{H0} die Dichte im Zentrum des Galaxienhalos (Galaxienzentrum) und r_C eine typische Längenskala in radialer Richtung im Halo darstellen.

Rotationskurve

Die Geschwindigkeit eines Körpers in einer kreisförmigen Umlaufbahn erhält man, wenn wir das Gleichgewicht von Gravitationskraft F_G und Zentrifugalkraft F_Z betrachten. Diese Herleitung finden Sie im Dokument „Theorie: Rotationskurve um eine Punktmasse“ (TH-Rotationskurve-Sonnensystem.pdf). Es ergibt sich eine Geschwindigkeitsrelation von

$$v = \sqrt{G M / r}$$

für eine Punktmasse im Zentrum. Bei einer Punktmasse im Zentrum ist die Masse konstant, das heißt

$$M = \text{konst.}$$

In einer Galaxie jedoch haben wir eine Dichteverteilung vom Galaxienzentrum nach außen und jeder Körper auf einer Umlaufbahn am Radius r um dieses Zentrum wird durch die gesamte Masse M(r) innerhalb der Umlaufbahn gravitativ auf seiner Bahn gehalten, das heißt in einer Galaxie gilt

$$M = M(r) \neq \text{konst.}$$

Hinweis: Für die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn ist nur die gravitative Wirkung der Masse eines Kugelvolumens innerhalb seiner Umlaufbahn maßgebend.

Nun müssen wir die Massen innerhalb eines Radius r aufsummieren. Dies ist zum einen eine zentrale Punktmasse (z.B. zentrales Schwarzes Loch und Sternhaufen)

$$M_Z$$

weiters die Masse der Galaxienscheibe bis zum Radius r

$$M_S(r) = \rho_S(r) * V_S(r) = \rho_{S0}\, \mathrm{EXP}(- r / r_H) * r^2 \cdot \pi \cdot d$$

sowie die Masse des Galaxienhalos bis zum Radius r

$$M_H(r) = \rho_H(r) * V_H(r) = \rho_{H0} \left(1 + (r / r_C)^2 \right)^{-1} * 4 \cdot \pi \cdot r^3 / 3$$

Die Gesamtmasse innerhalb des Radius r ergibt sich somit zu

$$M(r) = M_Z + M_S(r) + M_H(r)$$

und setzen diese nun in die Geschwindigkeitsrelation ein

$$v = v(r) = \sqrt{G M(r) / r} = \sqrt{G [M_Z + M_S(r) + M_H(r)] / r}$$

Mit diesem einfachen Modell einer Spiralgalaxie kann die gemessene Rotationskurve von vielen Galaxien erklärt werden.

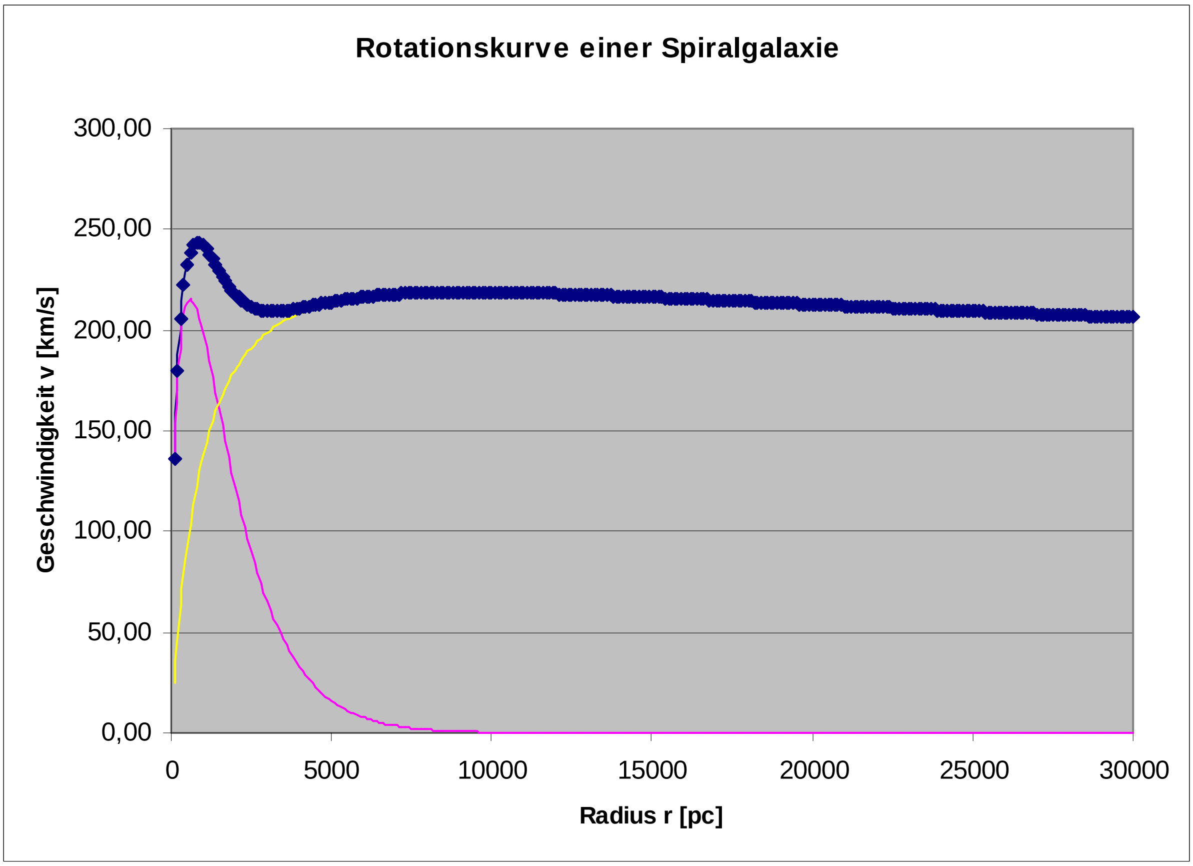

Abbildung 1.5) Simulierte Rotationskurve einer Spiralgalaxie

Zeichenerklärung

M_S ... Masse der Galaxienscheibe [kg]
M_H ... Masse des Galaxienhalos [kg]
ρ_S .... Dichte der Galaxienscheibe [kg/m^3]
ρ_H .... Dichte des Galaxienhalos [kg/m^3]
ρ_{S0} ... Dichte der Scheibe im Galaxienzentrum [kg/m^3]
ρ_{H0} ... Dichte des Halos im Galaxienzentrum [kg/m^3]
V_S.... Volumen der Galaxienscheibe [m^3]
V_H.... Volumen des Galaxienhalos [m^3]
r...... Abstand zwischen Zentrum der Galaxie und dem umkreisenden Körper in Meter [m]
v ..... Geschwindigkeit (Betrag der -) des umkreisenden Körpers in Meter pro Sekunde [m / s]
G … Gravitationskonstante; $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ [m^3 / kg / s^2]

Einheiten

1 [N]ewton = 1 kg m / s^2